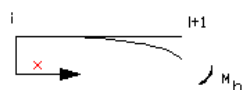
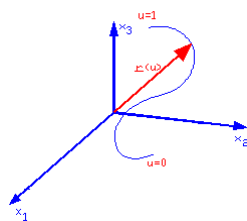


# SPLINE függvények

## SPLINE értelmezése

A SPLINE mechanikai értelmezése:



Görbület

$$\frac{1}{\rho} = W''(x)$$

$$W'' = \frac{M_h(x)}{IE}$$

$$\underline{r}(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix}$$

A SPLINE matematikai értelmezése:

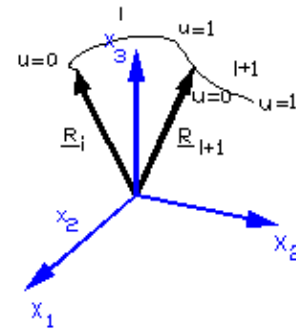
- pontrendszeren vagy közelében megy át
- diszkrét pontokat közelít (interpolál)
- szegmensekből áll
- a szegmensek között illesztési feltételek vannak előírva

## Ferguson SPLINE

- Paraméteres, harmadfokú polinom szegmensekkel írja le a görbét

az  $i$ -edik szegmens egyenlete:

$$\underline{r}(u) = \sum_{k=0}^3 \underline{A}_k \cdot u^k$$



$$\underline{r}(u) = \underline{A}_0 + u \underline{A}_1 + u^2 \underline{A}_2 + u^3 \underline{A}_3$$

$$0 \leq u \leq 1$$

SPLINE függvények

3

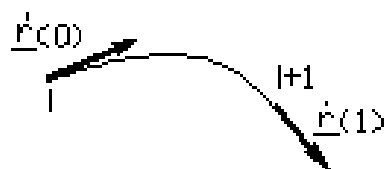
## Ferguson SPLINE

- Adottak az  $\underline{R}_1, \underline{R}_2, \underline{R}_3, \dots, \underline{R}_i, \underline{R}_{i+1}, \dots, \underline{R}_n$  alappontok helyvektorai

$$\underline{r}(u) = \underline{A}_0 + u \underline{A}_1 + u^2 \underline{A}_2 + u^3 \underline{A}_3$$

$$\underline{r}(u=0) = \underline{R}_i \rightarrow \underline{A}_0 = \underline{R}_i \quad (1)$$

$$\underline{r}(u=1) = \underline{A}_0 + \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3 = \underline{R}_{i+1} \quad (2)$$



$\dot{\underline{r}}$  - érintővektor

Az érintővektorok a végpontokban  
( $u$  – szerinti deriváltak)

SPLINE függvények

4

## Ferguson SPLINE



$$\underline{r}(u) = \underline{A}_0 + u \underline{A}_1 + u^2 \underline{A}_2 + u^3 \underline{A}_3$$

$$\dot{\underline{r}}(u) = \underline{A}_1 + 2u \underline{A}_2 + 3u^2 \underline{A}_3$$

$$\underline{A}_0 = \underline{R}_i \quad (1)$$

$$\underline{r}(u=1) = \underline{A}_0 + \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3 = \underline{R}_{i+1} \quad (2)$$

$$\dot{\underline{r}}(u=0) = \underline{A}_1 \quad (3)$$

$$\dot{\underline{r}}(u=1) = \underline{A}_1 + 2\underline{A}_2 + 3\underline{A}_3 \quad (4)$$

(1) (2) (3) (4) egyenletekben négy ismeretlen van

SPLINE függvények

5

## Ferguson SPLINE

$$\underline{A}_0 = \underline{R}_i \quad (1)$$

$$\underline{r}(u=1) = \underline{A}_0 + \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3 = \underline{R}_{i+1} \quad (2)$$

$$\dot{\underline{r}}(u=0) = \underline{A}_1 \quad (3)$$

$$\dot{\underline{r}}(u=1) = \underline{A}_1 + 2\underline{A}_2 + 3\underline{A}_3 \quad (4)$$

$$(3)\text{-ből: } \underline{A}_1 = \dot{\underline{r}}(0)$$

$$(2)\text{-ből: } \underline{R}_i + \underline{r}(0) + \underline{A}_2 + \underline{A}_3 = \underline{R}_{i+1}$$

$$\underline{A}_2 = (\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - \underline{r}(0) - \underline{A}_3$$

$$(4)\text{-ből: } 3\underline{A}_3 = \dot{\underline{r}}(1) - \underline{A}_1 - 2\underline{A}_2$$

SPLINE függvények

6

## Ferguson SPLINE

$$3\underline{A}_3 = \dot{\underline{r}}(1) - \underline{A}_1 - 2\underline{A}_2$$

Helyettesítsük be  $\underline{A}_1$  -et és  $\underline{A}_2$  -őt

$$3\underline{A}_3 = \dot{\underline{r}}(1) - \dot{\underline{r}}(0) - 2 \left[ (\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - \dot{\underline{r}}(0) - \underline{A}_3 \right]$$

$$\underline{A}_3 = \dot{\underline{r}}(1) + \dot{\underline{r}}(0) - 2(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i)$$

Ezt írjuk vissza az  $\underline{A}_2$ -be

$$\underline{A}_2 = (\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - \dot{\underline{r}}(0) - \dot{\underline{r}}(1) + 2(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i)$$

$$\underline{A}_2 = 3(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - 2\dot{\underline{r}}(0) - \dot{\underline{r}}(1)$$

SPLINE függvények

7

## Ferguson SPLINE

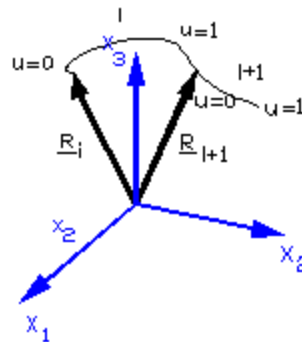
Összefoglalva:

$$\underline{A}_0 = \underline{R}_i$$

$$\underline{A}_1 = \dot{\underline{r}}(0)$$

$$\underline{A}_2 = 3(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - 2\dot{\underline{r}}(0) - \dot{\underline{r}}(1)$$

$$\underline{A}_3 = -2(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) + \dot{\underline{r}}(0) + \dot{\underline{r}}(1)$$



SPLINE függvények

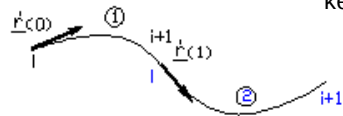
8

## Ferguson SPLINE



Az érintővektorok (sebesség vektorok) meghatározásával a szegmenseket is meghatározhatjuk

### Illesztési feltételek:



Az  $i$ -edik szegmens végpontja essen egybe az  $i+1$ -edik szegmens kezdőpontjával

$$\underline{r}_i(u=1) = \underline{r}_{i+1}(u=0)$$

Ez a feltétel teljesül az alappontok megadásával

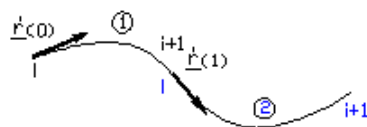
$\underline{R}_1, \underline{R}_2, \underline{R}_3, \dots, \underline{R}_i, \underline{R}_{i+1}, \dots, \underline{R}_n$  alappontok helyvektorai

SPLINE függvények

9

## Ferguson SPLINE

### Illesztési feltételek:



A görbe folytonos legyen

Az  $\underline{R}_{i+1}$  pontban létezzen a jobb és baloldali derivált

$$\dot{\underline{r}}_i(u=1) = \dot{\underline{r}}_{i+1}(u=0)$$

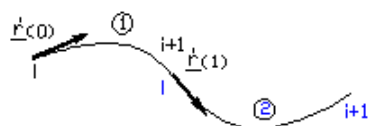
SPLINE függvények

10

## Ferguson SPLINE

### Illesztési feltételek:

A bal oldali szegmens végén az érintő vektor egyezzen meg a jobb oldali szegmens kezdőpontjában lévő érintő vektorral.



megjegyzés:

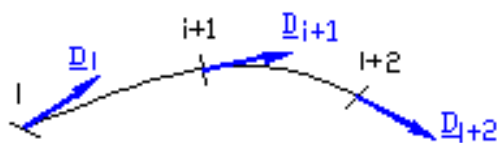
$$\ddot{\underline{r}}_i(u=1) = \ddot{\underline{r}}_{i+1}(u=0)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left| \begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \underline{r} & \underline{r} \end{matrix} \right|}{\left| \underline{r} \right|^3} \quad \text{görbület}$$

SPLINE függvények

11

## Ferguson SPLINE



$$\dot{\underline{r}}_i(u=1) = \underline{D}_{i+1} = \dot{\underline{r}}_{i+1}(u=0)$$

A szegmensek csatlakozási pontjainál lévő  $\underline{r}_i$  sebesség vektorok helyett vezessük be a folyamatos számozású  $\underline{D}_i$  derivált vektorokat

SPLINE függvények

12

## Ferguson SPLINE

Az alap egyenletbe, írjuk be az  $\underline{A}_i$  megoldásait

$$\dot{\underline{r}}(u) = \underline{A}_1 + 2u \underline{A}_2 + 3u^2 \underline{A}_3$$

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{r}_i(u) = & \underline{R}_i & + u \underline{D}_i & + u^2 [3(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - 2\underline{D}_i - \underline{D}_{i+1}] & + u^3 [-2(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) + \underline{D}_i + \underline{D}_{i+1}] \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & \underline{A}_0 & \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \underline{A}_3 \end{array}$$

SPLINE függvények

13

## Ferguson SPLINE

A harmadik illesztési feltételhez állítsuk elő a szegmens második deriváltját

$$\ddot{\underline{r}}_i(u=1) = \ddot{\underline{r}}_{i+1}(u=0)$$

$$\underline{r}_i(u) = \underline{R}_i + u \underline{D}_i + u^2 [3(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - 2\underline{D}_i - \underline{D}_{i+1}] + u^3 [-2(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) + \underline{D}_i + \underline{D}_{i+1}]$$

$$\dot{\underline{r}}(u) = \underline{D}_i + 2u [3(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - 2\underline{D}_i - \underline{D}_{i+1}] + 3u^2 [-2(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) + \underline{D}_i + \underline{D}_{i+1}]$$

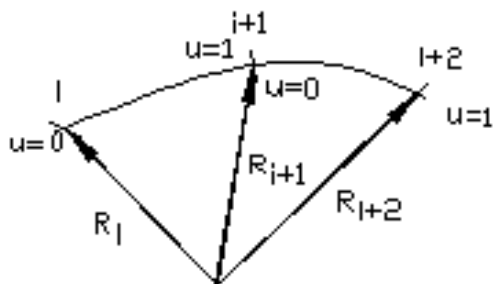
$$\ddot{\underline{r}}(u) = 2 [3(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - 2\underline{D}_i - \underline{D}_{i+1}] + 6u [-2(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) + \underline{D}_i + \underline{D}_{i+1}]$$

SPLINE függvények

14

## Ferguson SPLINE

Illesszük össze a két szomszédos szegmenst az  $i+1$  pontban



A bal oldali szegmens végén  $u = 1$ ,  
a szegmens helyvektorai  $\underline{R}_{i+1}$ ;  $\underline{R}_i$

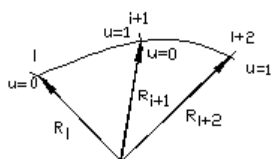
A jobb oldali szegmens kezdő pontjában  
 $u = 0$ ,

A szegmens helyvektorai  $\underline{R}_{i+2}$ ;  $\underline{R}_{i+1}$

SPLINE függvények

15

## Ferguson SPLINE



$$\ddot{\underline{r}}_i(u=1) = \ddot{\underline{r}}_{i+1}(u=0)$$

$$\ddot{\underline{r}}(u) = 2[3(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - 2\underline{D}_i - \underline{D}_{i+1}] + 6u[-2(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) + \underline{D}_i + \underline{D}_{i+1}]$$

Bal oldali szegmensre:

$$\ddot{\underline{r}}(u=1) = 6(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - 4\underline{D}_i - 2\underline{D}_{i+1} - 12(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) + 6\underline{D}_i + 6\underline{D}_{i+1}^*$$

Jobb oldali szegmensre

$$\ddot{\underline{r}}(u=0) = 6(\underline{R}_{i+2} - \underline{R}_{i+1}) - 4\underline{D}_{i+1} - 2\underline{D}_{i+2}^{**}$$

SPLINE függvények

16

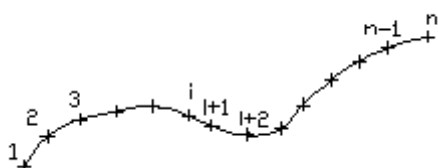
## Ferguson SPLINE

$$\begin{aligned}
 * \quad & 6(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - 4\underline{D}_i - 2\underline{D}_{i+1} - 12(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) + 6\underline{D}_i + 6\underline{D}_{i+1} = \\
 & = 6\underline{R}_{i+1} - 6\underline{R}_i - 4\underline{D}_i - 2\underline{D}_{i+1} - 12\underline{R}_{i+1} + 12\underline{R}_i + 6\underline{D}_i + 6\underline{D}_{i+1} \\
 ** \quad & 6(\underline{R}_{i+2} - \underline{R}_{i+1}) - 4\underline{D}_{i+1} - 2\underline{D}_{i+2} = \\
 & = 6\underline{R}_{i+2} - 6\underline{R}_{i+1} - 4\underline{D}_{i+1} - 2\underline{D}_{i+2} \quad * = ** \\
 & 6\underline{R}_{i+2} - 6\underline{R}_i - 4\underline{D}_i - 2\underline{D}_{i+1} - 12\underline{R}_{i+1} + 12\underline{R}_i + 6\underline{D}_i + 6\underline{D}_{i+1} = \\
 & = 6\underline{R}_{i+2} - 6\underline{R}_i - 4\underline{D}_{i+1} - 2\underline{D}_{i+2} \\
 & 6\underline{R}_{i+2} - 6\underline{R}_i = 2\underline{D}_i + 4\underline{D}_{i+1} + 2\underline{D}_{i+2} \\
 & 3(\underline{R}_{i+2} - \underline{R}_i) = \underline{D}_i + 4\underline{D}_{i+1} + \underline{D}_{i+2} \quad !!!
 \end{aligned}$$

SPLINE függvények

17

## Ferguson SPLINE



Határozzuk meg a kezdő- és végpontokra a deriváltvektorokat

Első szegmens kezdő pontja

$$\ddot{\underline{r}}_1(u=0) = \underline{0}$$

$$6(\underline{R}_2 - \underline{R}_1) - 4\underline{D}_1 - 2\underline{D}_2 = \underline{0}$$

$$3(\underline{R}_2 - \underline{R}_1) = 2\underline{D}_1 + \underline{D}_2$$

Utolsó szegmens végpontja

$$\ddot{\underline{r}}_{n-1}(u=1) = \underline{0}$$

$$6(\underline{R}_n - \underline{R}_{n-1}) - 4\underline{D}_n - 2\underline{D}_{n-1} = \underline{0}$$

$$3(\underline{R}_n - \underline{R}_{n-1}) = 2\underline{D}_{n-1} + \underline{D}_n$$

SPLINE függvények

18

## Ferguson SPLINE

A kezdő- és végpontokra vonatkozó „sebességvektorok”,  
( $\underline{D}_i$ ) derivált vektorokkal együtt a megoldandó egyenletrendszer:

$$2\underline{D}_1 + \underline{D}_2 = 3(\underline{R}_2 - \underline{R}_1)$$

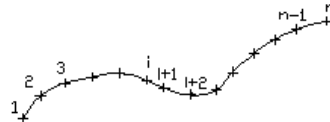
$$\underline{D}_1 + 4\underline{D}_2 + \underline{D}_3 = 3(\underline{R}_3 - \underline{R}_1)$$

$$\underline{D}_2 + 4\underline{D}_3 + \underline{D}_4 = 3(\underline{R}_4 - \underline{R}_2)$$

...

$$\underline{D}_{n-2} + 4\underline{D}_{n-1} + \underline{D}_n = 3(\underline{R}_{n-1} - \underline{R}_{n-2})$$

$$\underline{D}_{n-1} + 2\underline{D}_n = 3(\underline{R}_n - \underline{R}_{n-1})$$



SPLINE függvények

19

## Ferguson SPLINE

Írjuk fel az egyenletrendszer együtthatóit egy mátrixba

$$2\underline{D}_1 + \underline{D}_2 = 3(\underline{R}_2 - \underline{R}_1)$$

$$\underline{D}_1 + 4\underline{D}_2 + \underline{D}_3 = 3(\underline{R}_3 - \underline{R}_1)$$

$$\underline{D}_2 + 4\underline{D}_3 + \underline{D}_4 = 3(\underline{R}_4 - \underline{R}_2)$$

...

$$\underline{D}_{n-2} + 4\underline{D}_{n-1} + \underline{D}_n = 3(\underline{R}_{n-1} - \underline{R}_{n-2})$$

$$\underline{D}_{n-1} + 2\underline{D}_n = 3(\underline{R}_n - \underline{R}_{n-1})$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}} = 3 \cdot \underline{\underline{H}}$$

ahol

$\underline{\underline{H}}$  a helyvektor mátrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{D}_1 \\ \underline{D}_2 \\ \underline{D}_3 \\ \dots \\ \underline{D}_{n-1} \\ \underline{D}_n \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} \underline{R}_2 - \underline{R}_1 \\ \underline{R}_3 - \underline{R}_1 \\ \underline{R}_4 - \underline{R}_2 \\ \dots \\ \underline{R}_n - \underline{R}_{n-2} \\ \underline{R}_n - \underline{R}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$\downarrow$   
 $\underline{\underline{A}}$

$\downarrow$   
 $\underline{\underline{D}}$

$\downarrow$   
 $\underline{\underline{H}}$

SPLINE függvények

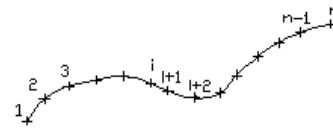
20

## Ferguson SPLINE

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}} = 3 \cdot \underline{\underline{H}}$$

$$\underline{\underline{D}} = 3 \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{H}}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \rightarrow \text{Inverz mátrix}$$



$$\underline{r}(u) = \underline{A}_0 + u \underline{A}_1 + u^2 \underline{A}_2 + u^3 \underline{A}_3$$

Minden szegmensre más és más

$A_0; A_1; A_2; A_3$  adódik

Emlékeztető:

$$\underline{A}_0 = \underline{R}_i$$

$$\underline{A}_1 = \underline{D}_i$$

$$\underline{A}_2 = 3(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - \underline{D}_i - \underline{D}_{i+1}$$

$$\underline{A}_3 = -2(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) + \underline{D}_i + \underline{D}_{i+1}$$

SPLINE függvények

21