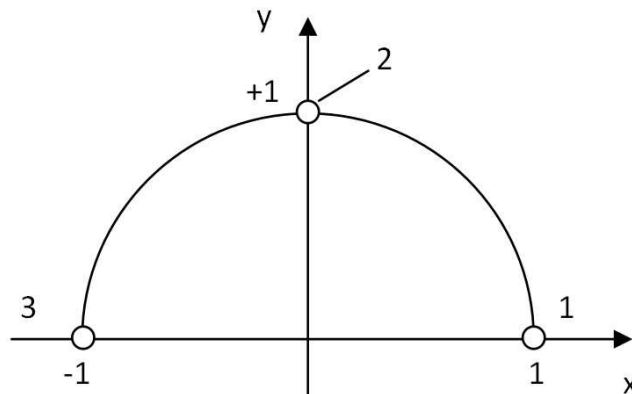


CAD-CAM-CAE Példatár

A példa megnevezése:	Fergusson szplájn számítás
A példa száma:	ÓE-A25
A példa szintje:	<u>alap</u> – közepes – haladó
CAX rendszer:	CAD
Kapcsolódó TÁMOP tananyag rész:	CAD 02
A feladat rövid leírása:	Félkör közelítése Fergusson szplájnnal

1. A feladat megfogalmazása

Közelítsünk Fergusson szplájn segítségével egy 1 sugarú félkört, mely az xy sík +y felén van.



2. A megoldás lépései:

Adva vannak a meghatározandó szplájn alappontjainak helyvektorai, rendre $\underline{R}_1$, $\underline{R}_2$, $\underline{R}_3$.

$$\underline{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{R}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A szplájn meghatározásához szükségünk van a $\underline{D}$ derivált mátrix előállítására. Mivel mátrixal osztani nem lehet, ezért először az $\underline{A}^{-1}$ inverz mátrixot kell meghatározni.

$$\underline{A} * \underline{D} = 3\underline{H} \iff \underline{D} = 3\underline{A}^{-1} * \underline{H}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \underline{A}^{-1} \text{ inverz mátrix előállítás}$$

$$\underline{A} * \underline{A}^{-1} = \underline{E} \quad \underline{A}^{-1} = \frac{adj \underline{A}}{\det \underline{A}}$$

$$\text{ha } \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{akkor } \underline{\underline{adjA}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad A_{ij} \text{ az } a_{ij}\text{-hez tartozó előjelhelyes aldetermináns}$$

adjungált $\underline{\underline{A}}$ előállítás

$$A_{11} = 4 * 2 - 1 * 1 = 7$$

$$A_{12} = -(1 * 2 - 0) = -2$$

$$A_{13} = 1 * 1 - 0 = 1$$

$$A_{21} = -(1 * 2 - 0) = -2$$

$$A_{22} = 2 * 2 - 0 = 4$$

$$A_{23} = -(2 * 1 - 0) = -2$$

$$A_{31} = 1 * 1 - 0 = 1$$

$$A_{32} = -(2 * 1 - 0) = -2$$

$$A_{33} = 2 * 4 - 1 * 1 = 7$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} A_{ij} & & \text{előjelhelyes} \\ \text{aldeterminánsok} & & \\ \text{előjelszabály} & \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} & \end{matrix}$$

inverz mátrix

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{\underline{\underline{adjA}}}{\det \underline{\underline{A}}} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Ezután képezni kell a helyvektorok különbségeit:

$$\underline{R_2} - \underline{R_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R_3} - \underline{R_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R_3} - \underline{R_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ezzel már a $\underline{D}$ derivált mátrix meghatározható, ha a helyvektorok $\underline{H}$ mátrixát is felírjuk.

$$\underline{D} = 3\underline{\underline{A}}^{-1} * \underline{H}$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{R_2} - \underline{R_1} \\ \underline{R_3} - \underline{R_1} \\ \underline{R_3} - \underline{R_2} \end{bmatrix}$$

Helyettesítsünk be a $\underline{D} = 3\underline{\underline{A}}^{-1} * \underline{H}$ egyenletbe

$$3 * \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{R}_2 - \underline{R}_1 \\ \underline{R}_3 - \underline{R}_1 \\ \underline{R}_3 - \underline{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D}_1 \\ \underline{D}_2 \\ \underline{D}_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_1 = 3 * \frac{1}{12} [7(\underline{R}_2 - \underline{R}_1) - 2(\underline{R}_3 - \underline{R}_1) + (\underline{R}_3 - \underline{R}_2)]$$

$$\underline{D}_2 = 3 * \frac{1}{12} [-2(\underline{R}_2 - \underline{R}_1) + 4(\underline{R}_3 - \underline{R}_1) - 2(\underline{R}_3 - \underline{R}_2)]$$

$$\underline{D}_3 = 3 * \frac{1}{12} [1(\underline{R}_2 - \underline{R}_1) - 2(\underline{R}_3 - \underline{R}_1) + 7(\underline{R}_3 - \underline{R}_2)]$$

$$\underline{D}_1 = \frac{1}{4} \left(7 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_2 = \frac{1}{4} \left(-2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_3 = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1,5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{D}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{D}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ferguson szplájn általános alakja:

$$\underline{r}(u) = \underline{A}_0 + u\underline{A}_1 + u^2\underline{A}_2 + u^3\underline{A}_3 \quad 0 \leq u \leq 1$$

Az i-edik szegmensre

$$\underline{r}_i(u) = \underline{R}_i + u\underline{D}_1 + u^2 \underbrace{[3(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) - 2\underline{D}_i - \underline{D}_{i+1}]}_{\underline{A}_2} + u^3 \underbrace{[-2(\underline{R}_{i+1} - \underline{R}_i) + \underline{D}_i + \underline{D}_{i+1}]}_{\underline{A}_3}$$

$$\underline{A}_0 = \underline{R}_i \quad \underline{A}_1 = \underline{D}_1$$

1. Szegmensre:

$$\begin{aligned} \underline{r}_1(u) &= \underline{R}_1 + u\underline{D}_1 + u^2 [3(\underline{R}_2 - \underline{R}_1) - 2\underline{D}_1 - \underline{D}_2] + u^3 [-2(\underline{R}_2 - \underline{R}_1) + \underline{D}_1 - \underline{D}_2] = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 1,5 \\ 0 \end{bmatrix} + u^2 \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &\quad + u^3 \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1,5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\underline{r}_1(u) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 1,5 \\ 0 \end{bmatrix} + u^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Próba:

$$\underline{r}_1(u=0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_1(u=1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1,5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tehát az első szegmens $n=0$ -nál adja az 1. pontot és $n=1$ -nél adja meg a 2. pontot

2. Szegmensre:

$$\begin{aligned} \underline{r}_2(u) &= \underline{R}_2 + u\underline{D}_2 + u^2[3(\underline{R}_3 - \underline{R}_2) - 2\underline{D}_2 - \underline{D}_3] + u^3[-2(\underline{R}_3 - \underline{R}_2) + \underline{D}_2 - \underline{D}_3] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u^2 \left\{ 3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1,5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &\quad + u^3 \left\{ -2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1,5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - u^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1,5 \\ 0 \end{bmatrix} + u^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\underline{A}_0$

$\underline{A}_1$

$\underline{A}_2$

$\underline{A}_3$

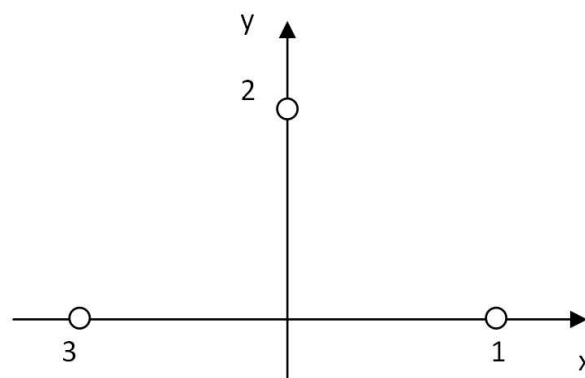
Együttható vektorokat meghatároztuk

Próba:

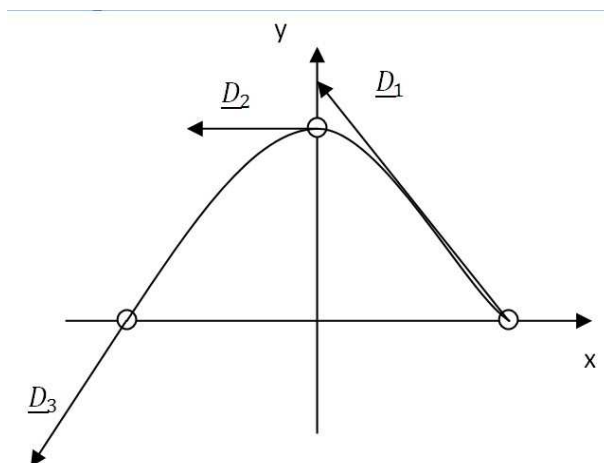
$$\underline{r}_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_2(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ábrázoljuk a kört közelítő spline-t a két szegmens $u=0$ és $u=1$ helyen adja a kör 1. – 2. – 3. jelű pontját



Rajzoljuk meg a $\underline{D}_i$ érintő vektorokat is.



Félkört három ponttal nehéz megközelíteni, ha így vesszük fel az alappontokat, akkor jobb lesz a közelítés.

