CAD-CAM-CAE Példatár

A példa megnevezése:	Koordináta geometria transzformáció
A példa száma:	ÓE-A24
A példa szintje:	alap – közepes – haladó
CAE rendszer:	-
Kapcsolódó TÁMOP tananyag:	CAD-02 CAD rendszerek geometriai alapjai
A feladat rövid leírása:	A24/1 – pont elforgatása tengely körül A24/2 – pont tükrözése síkra A24/3 – kocka ábrázolása frontális axonometriában

A24/1. feladat

1. A feladat megfogalmazása:

Adott a P_1=[3,1,0] pont. Forgassuk el a P_o=[1,2,0] ponton átmenő, X_3 koordináta tengellyel párhuzamos tengely körül 90º-kal!

2. A megoldás lépései:

A feladatot három lépéssel lehet megoldani:

1. Eltoljuk a forgástengelyt X_3 koordináta tengelybe.
2. Elvégezzük X_3 körül a 90º-os forgatást.
3. Visszatoljuk a forgástengelyt az eredeti helyére.

1. Eltoljuk a forgástengelyt X3 koordináta tengelybe.

Az eltolás vektora $\underline{t}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, vagy homogén transzformációs mátrixa:

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Elvégezzük X3 körül a 90º-os forgatást.

Mivel sin 90º=1 és cos90º=0, a forgatás homogén koordinátás mátrixa a következő:

$$\underline{F}_3 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Visszatoljuk a forgástengelyt az eredeti helyére.

Az eltolás vektora $\underline{t}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, vagy homogén transzformációs mátrixa:

$$\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A pont transzformált helye: $\underline{R}^* = \underline{T}_2 \cdot \left(\underline{F}_3 \cdot \left(\underline{T}_1 \cdot \underline{R}\right)\right) = \underline{M} \cdot \underline{R}$

$$\underline{M} = \underline{T}_2 \cdot \underline{F}_3 \cdot \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A mátrixszorzás során fontos, hogy jobbról balra haladunk (vagyis az utolsó transzformáció szerepel bal oldalon).

$$\underline{R}^* = \underline{M} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vagyis P_1^*=[2,4,0].

A24/2. feladat

1. A feladat megfogalmazása:

Adott a P_1=[-2,2,4] pont. Tükrözzük meg az X_1=2, [X_2,X_3] síkkal párhuzamos síkra!

2. A megoldás lépései:

A feladatot három lépéssel lehet megoldani:

1. Toljuk el a síkot az [X_2,X_3] síkba.
2. Végezzük el a tükrözést.
3. Toljuk vissza a síkot az eredeti helyére.

1. Toljuk el a síkot az [X_2,X_3] síkba.

Az eltolás vektora $\underline{t}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, vagy homogén transzformációs mátrixa:

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Végezzük el a tükrözést.

Az [X_2,X_3] síkra való tükrözés homogén koordinátás mátrixa:

$$\underline{S}_{2,3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Toljuk vissza a síkot az eredeti helyére.

Az eltolás vektora $\underline{t}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, vagy homogén transzformációs mátrixa:

$$\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A pont transzformált helye: $\underline{R}^* = \underline{T}_2 \cdot \left(\underline{S}_{2,3} \cdot \left(\underline{T}_1 \cdot \underline{R}\right)\right) = \underline{M} \cdot \underline{R}$

$$\underline{M} = \underline{T}_2 \cdot \underline{S}_{2,3} \cdot \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A mátrixszorzás során fontos, hogy jobbról balra haladunk (vagyis az utolsó transzformáció szerepel bal oldalon).

$$\underline{R}^* = \underline{M} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vagyis P_1^*=[6,2,4].

A24/3. feladat

1. A feladat megfogalmazása:

Adja meg egy 2 egység élhosszúságú, a koordináta síkokkal párhuzamos oldalú kocka sarokpontjainak koordinátáit **frontális axonometriában**!

2. A megoldás lépései:

1. Definiáljuk a kocka sarokpontjait.
2. A transzformációs mátrixszal generáljuk a síkban ábrázolandó sarokpontokat.

1. Definiáljuk a kocka sarokpontjait.

A 2 egység élhosszúságú kocka sarokpontjai:

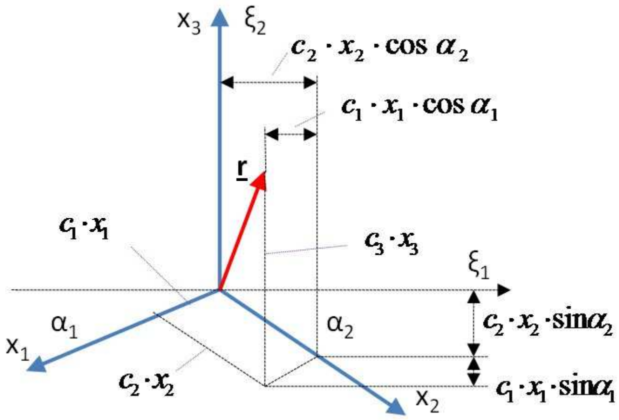
P_1=[0,0,0]	P_2=[2,0,0]	P_3=[2,2,0]	P_4=[0,2,0]
P_5=[0,0,2]	P_6=[2,0,2]	P_7=[2,2,2]	P_8=[0,2,2]

2. A transzformációs mátrixszal generáljuk a síkban ábrázolandó sarokpontokat.

A transzformáció általános formája a következő:

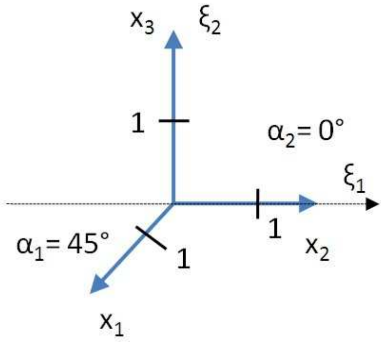
$\underline{\rho_i} = \underline{\underline{A}}\, \underline{P_i}$

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \cdot \cos\alpha_1 & c_2 \cdot \cos\alpha_2 & 0 \\ -c_1 \sin\alpha_1 & -c_2 \sin\alpha_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



Frontális axonometria esetén az x_2 tengely egybe esik ξ_1 tengellyel, az x_3 tengely egybe esik ξ_2 tengellyel, x_1 tengely 45º-os szöget zár be, az x_2, x_3 tengelyeken nincs rövidülés, míg x_1 tengelyen a rövidülés ½.

Tehát: $\alpha_1 = 45°$; $\alpha_2 = 0°$; $c_1 = 1/2$; $c_2 = c_3 = 1$.



$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\rho_1} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\rho_2} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\rho_3} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\rho_4} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\rho_5} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\rho_6} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\rho_7} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\rho_8} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$